MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Prova scritta del 08.02.2023

Esercizio 1 *(7 punti)*. Siano

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, \frac{1-y}{e^{-x^2}-2} \geq 0\} \quad \text{e} \quad Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, (x-3)^2 + y^2 = 4\}.$$

Determinare e rappresentare graficamente gli insiemi $X \cup Y$, $X \setminus Y$ e $\overline{X \setminus Y}$.
Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- $X \cup Y$ è chiuso;
- $X \cup Y$ è limitato;
- $X \cup Y$ è convesso;
- $(3,1) \in \partial(X \setminus Y)$.

Esercizio 2 *(8 punti)*. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2x + e^x y + 2e^x + 1.$$

(i) Determinare per quali direzioni $\mathbf{v}$ risulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 1) = 0;$$

(ii) determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, -2, f(1, -2))$;

(iii) determinare una funzione $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^x. \end{cases} \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3 *(9 punti)*. Sia $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+1} + e^y - ey.$$

(i) Calcolare la matrice Hessiana $D^2 f(x,y)$ e stabilire se f è convessa in $\mathbb{R}^2$;

(ii) determinare i punti critici di f e studiarne la natura;

(iii) determinare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f \ , \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f$$

e stabilire se si tratta di massimo e minimo assoluti.

Esercizio 4 *(9 punti)*. Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \leq 1 \, , \, 0 \leq z \leq 1 \right\} .$$

(i) Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_D \frac{x^2}{1 + z^2} \, dxdydz$$

(ii) Provare che

$$\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + z^{100}} \, dxdydz \leq \pi .$$